



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

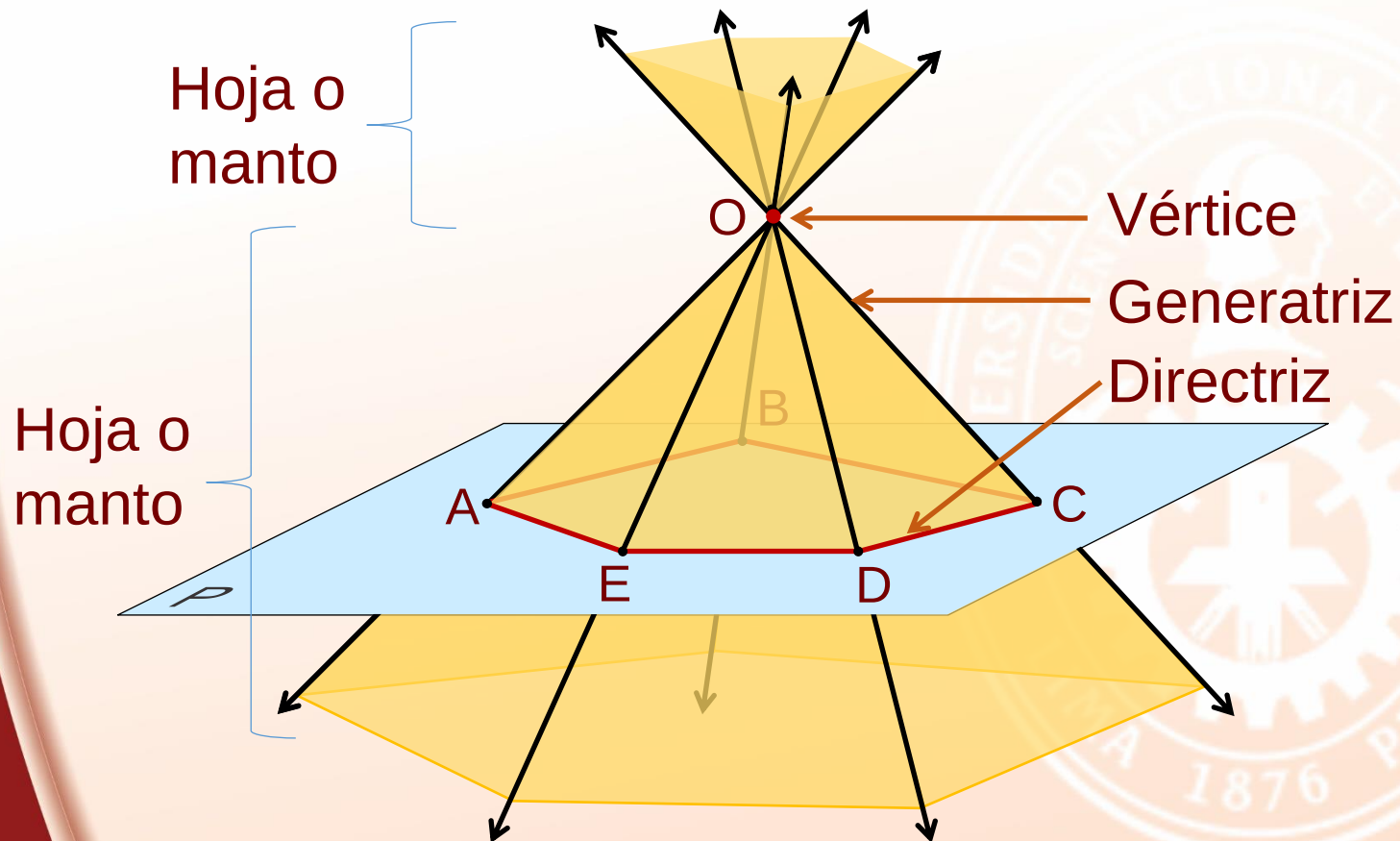
SUPERFICIE PIRAMIDAL

**CICLO
PRE
2024-1**



SUPERFICIE PIRAMIDAL

Definición.- Se denomina superficie piramidal, a la superficie generada por una recta que se desplaza por una poligonal plana simple o polígono y contiene a un punto fijo, no contenido en el plano de la poligonal.

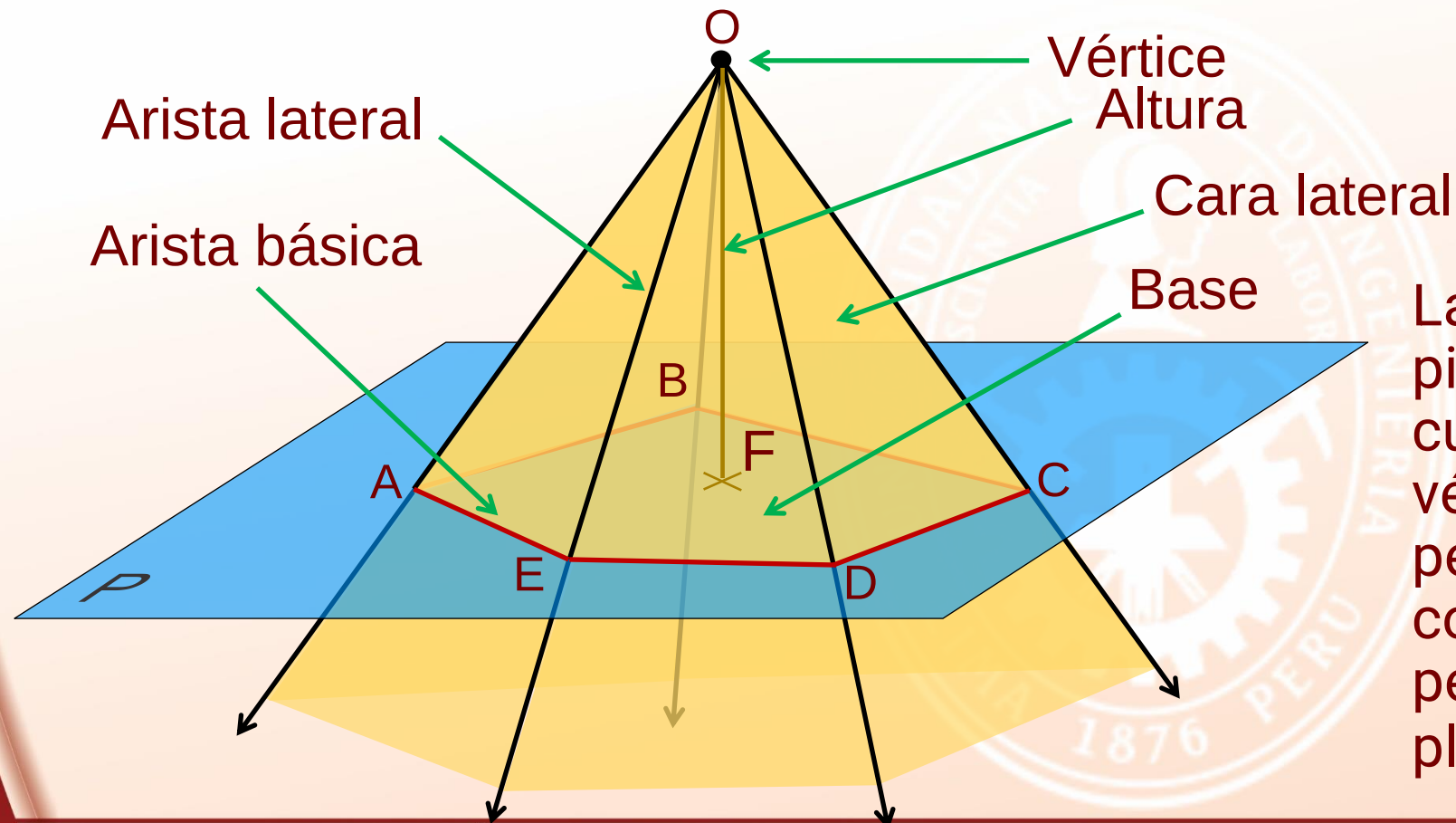


La superficie piramidal es cerrada, si la directriz es un polígono.

La superficie piramidal es abierta, si la directriz es una poligonal.

PIRÁMIDE

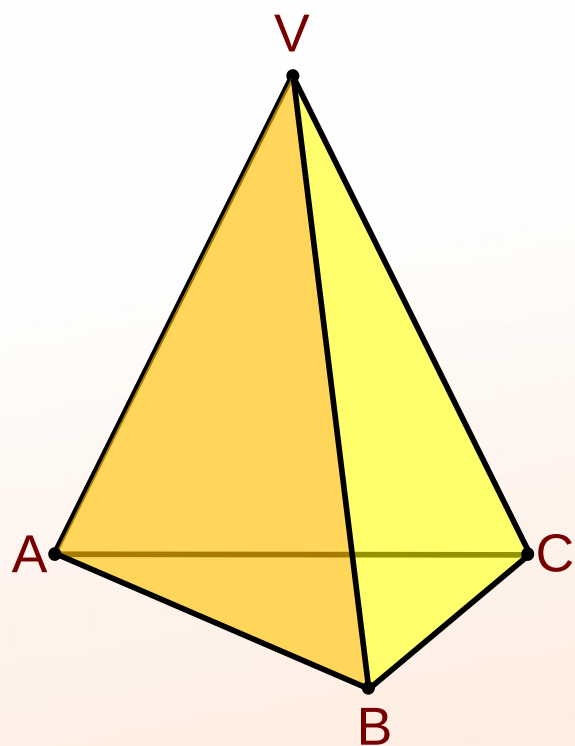
Definición.- Es el poliedro determinado por un plano secante a una superficie piramidal. La base de una pirámide es una región poligonal y las caras laterales son regiones triangulares.



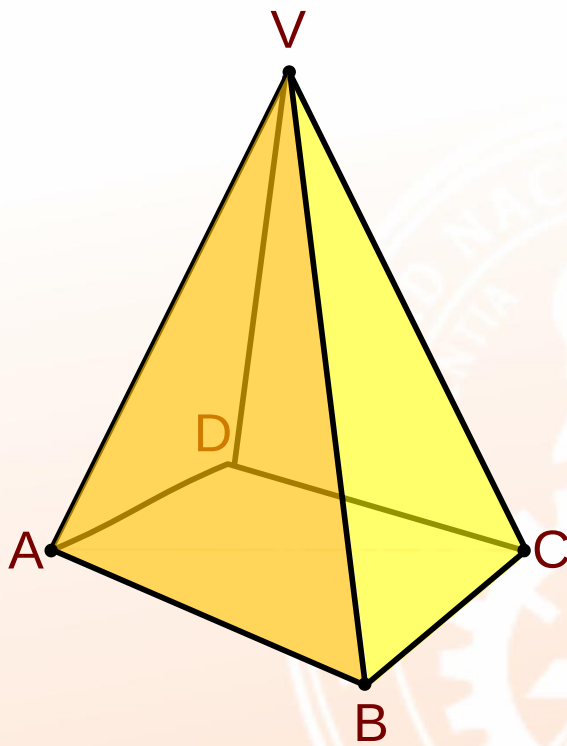
La altura de una pirámide es el segmento cuyos extremos son el vértice y un punto que pertenece al plano que contiene a la base, y es perpendicular a dicho plano, por ejemplo, $\overline{OF}$.

CLASIFICACIÓN DE LAS PIRÁMIDES

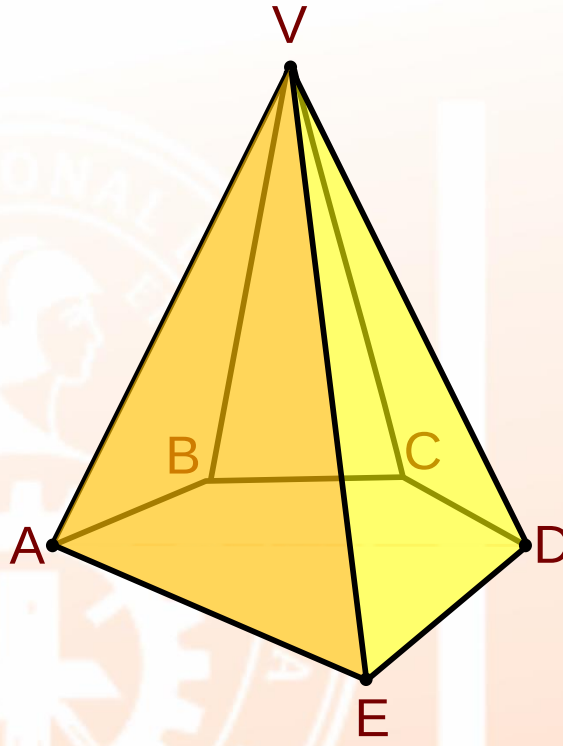
Una pirámide es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc., según que su base sea una región triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.



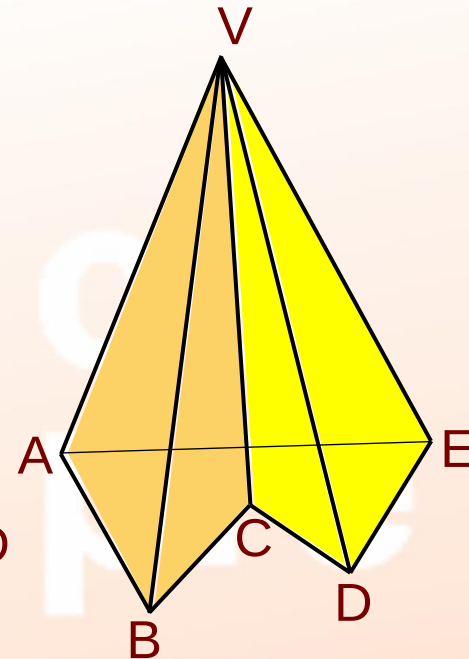
Pirámide
triangular



Pirámide
cuadrangular



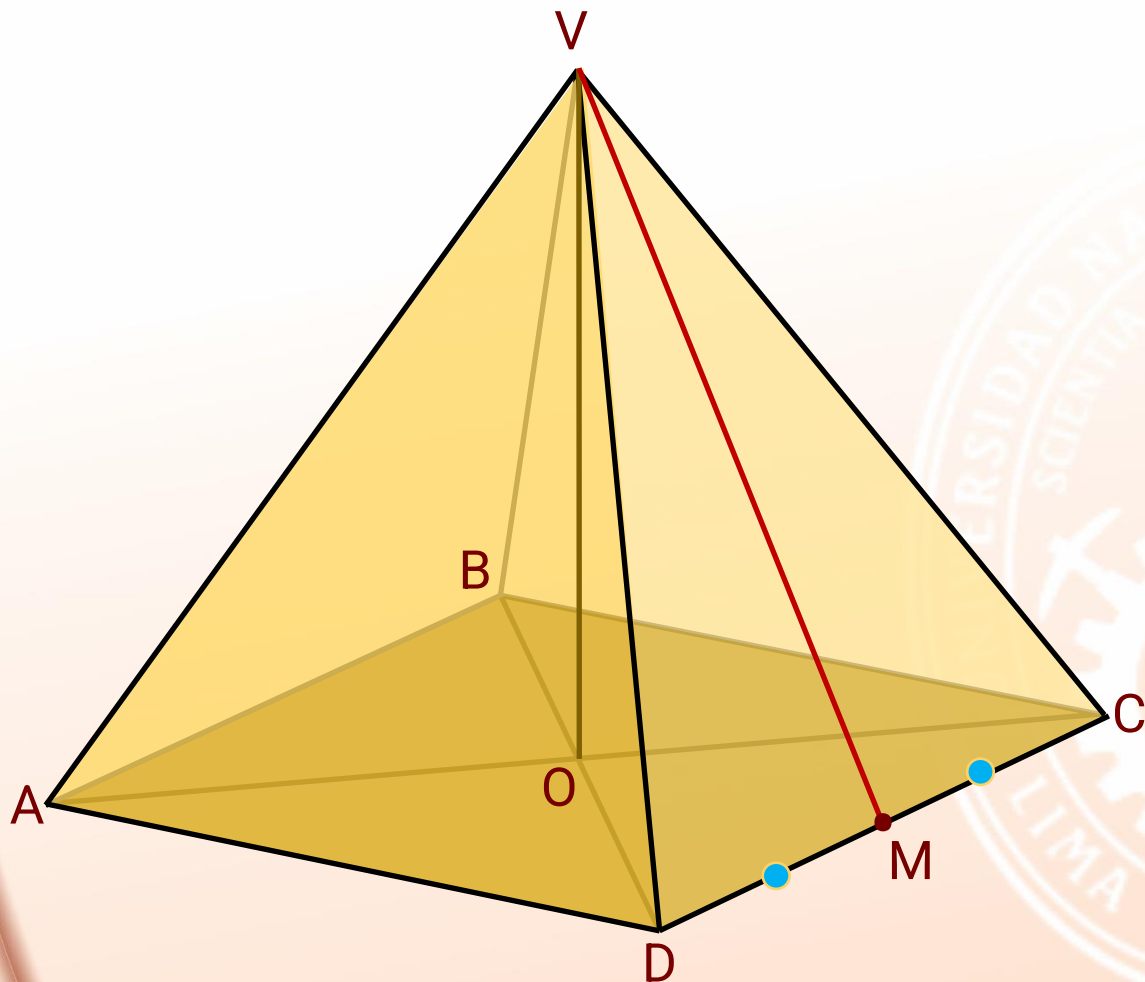
Pirámide
pentagonal



Pirámide
pentagonal no
convexa

PIRÁMIDE REGULAR

Definición.- Una pirámide es regular si la base es una región poligonal regular y las aristas laterales son congruentes entre sí.



$V-ABCD$ es una pirámide regular

$VA = VB = VC = VD$

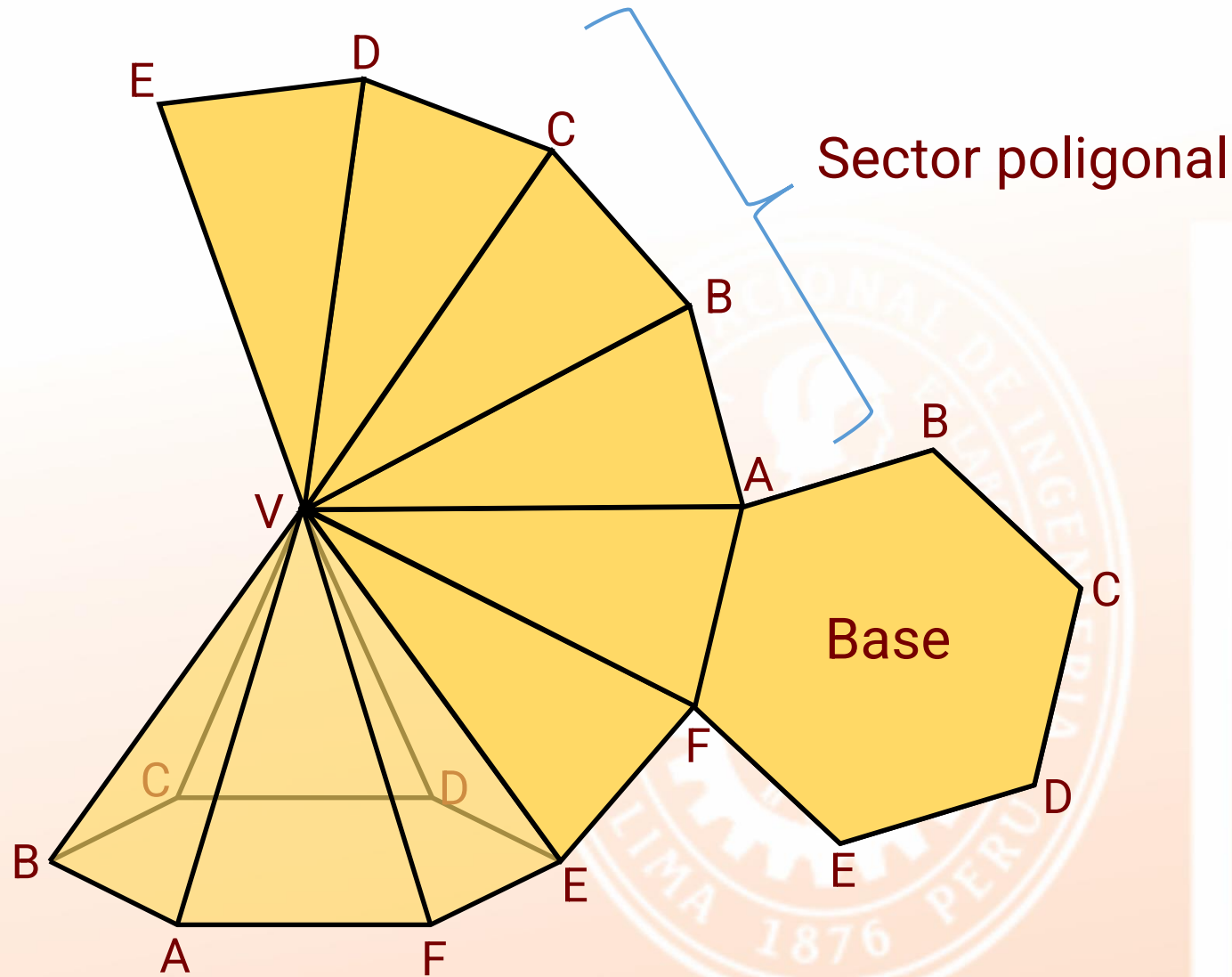
$ABCD$ es una región poligonal regular

O : centro de la base

$\overline{VO}$: altura de la pirámide

La apotema de una pirámide regular es el segmento cuyos extremos son el vértice y el punto medio de una arista básica, por ejemplo, $\overline{VM}$.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL DE UNA PIRÁMIDE REGULAR



Superficie lateral

Se denomina **superficie lateral** de una pirámide a la unión de todas las caras laterales de la pirámide.

El **área lateral** de una pirámide es el área de la superficie lateral de la pirámide y se denota por **S_L** .

Superficie Total

Se denomina **superficie total** de una pirámide a la unión de la superficie lateral y la base de la pirámide.

El **área total** de una pirámide es el área de la superficie total de la pirámide y se denota por **S_T** .

EJERCICIO 01

Indique el valor de verdad en cada proposición:

- I. Las caras laterales de las pirámides son regiones triangulares.
- II. En alguna pirámide, una arista lateral puede ser altura.
- III. En una pirámide, si las aristas laterales y la base determinan ángulos congruentes, entonces la pirámide es regular.
- IV. En una pirámide, si las aristas laterales son congruentes y la proyección ortogonal del vértice, es el centro de simetría del polígono que limita la base, entonces la pirámide es regular.

A) VVVV

B) VVFF

C) FVVF

D) FVFF

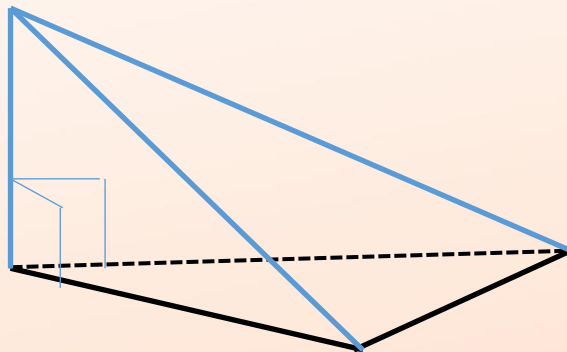
E) VVFF

RESOLUCIÓN 01

I. VERDADERO

Por definición, las caras laterales son regiones triangulares

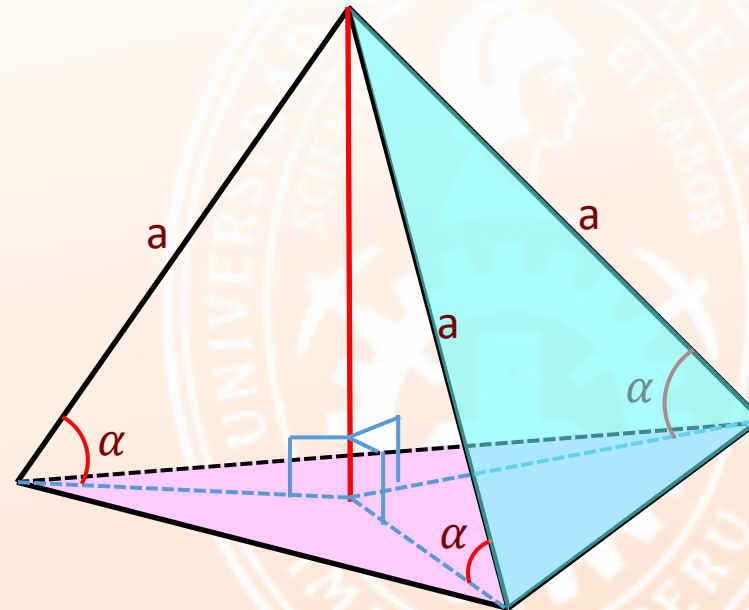
II. VERDADERO



Indique el valor de verdad en cada proposición:

- I. Las caras laterales de las pirámides son regiones triangulares.
- II. En alguna pirámide, una arista lateral puede ser altura.
- III. En una pirámide, si las aristas laterales y la base determinan ángulos congruentes, entonces la pirámide es regular.
- IV. En una pirámide, si las aristas laterales son congruentes y la proyección ortogonal del vértice, es el centro de simetría del polígono que limita la base, entonces la pirámide es regular.

III. FALSO



La pirámide no necesariamente es regular

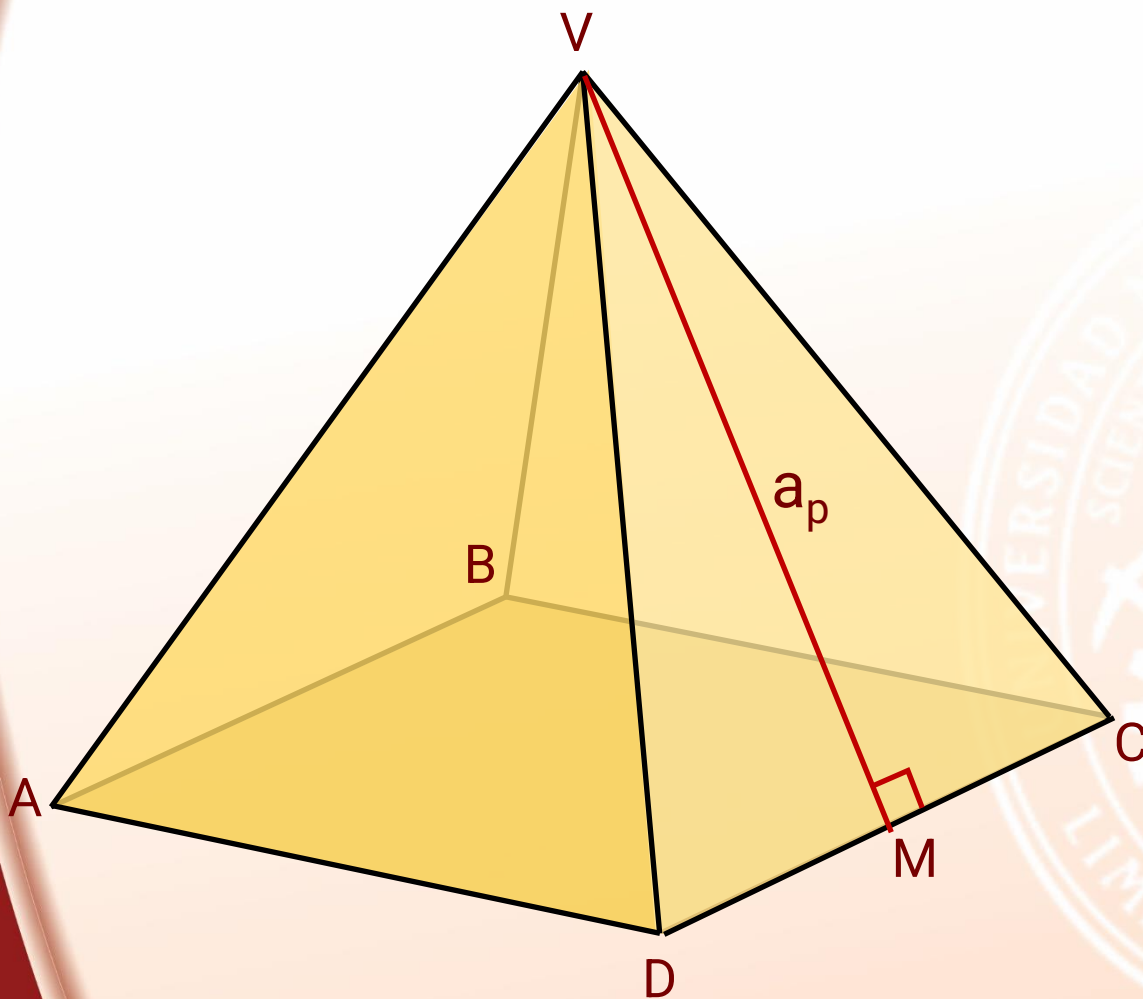
IV. FALSO

- La pirámide de base rectangular y la proyección del vértice es el centro de simetría del rectángulo, no es pirámide regular

Clave: B

ÁREA LATERAL DE UNA PIRÁMIDE REGULAR

Teorema.- El área lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base y la longitud del apotema de la pirámide.



V-ABCD es una pirámide regular

$$S_L = (p_B)(a_p)$$

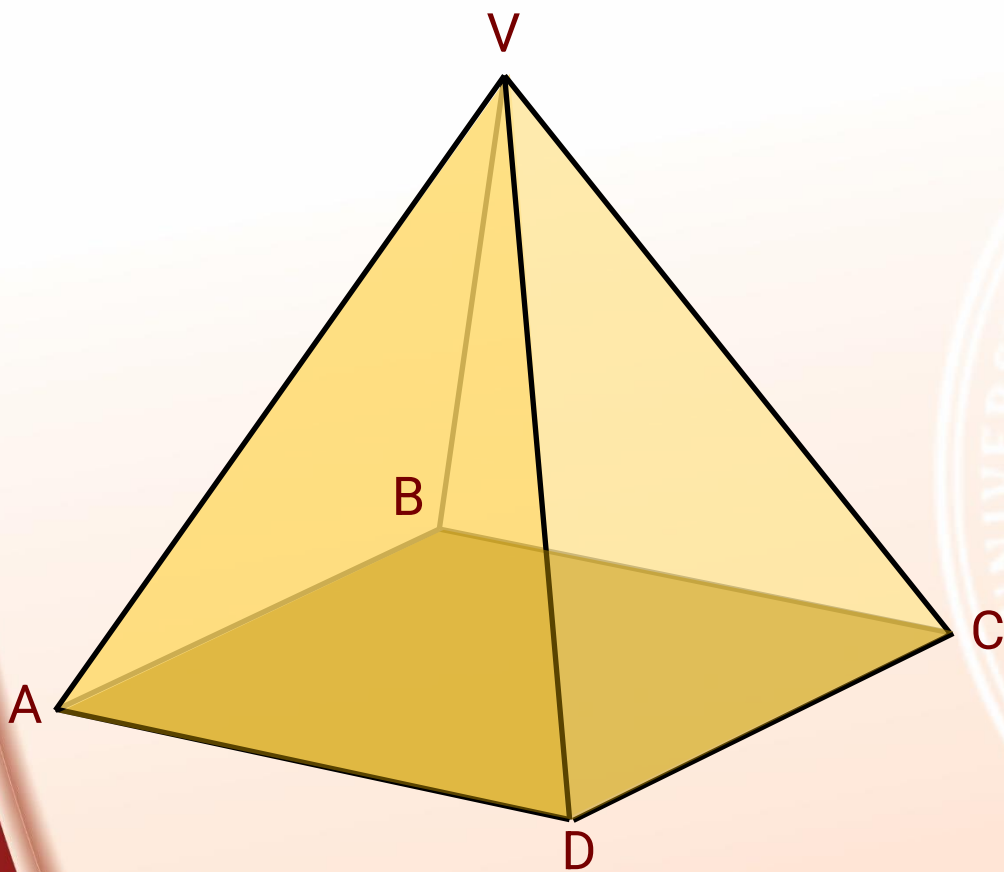
S_L : área lateral

p_B : semiperímetro de la base

a_p : longitud del apotema de la pirámide

ÁREA TOTAL DE UNA PIRÁMIDE REGULAR

Teorema.- El área total de una pirámide regular es igual a la suma del área lateral y el área de la base.



V – ABCD es una
pirámide regular

$$S_T = S_L + S_B$$

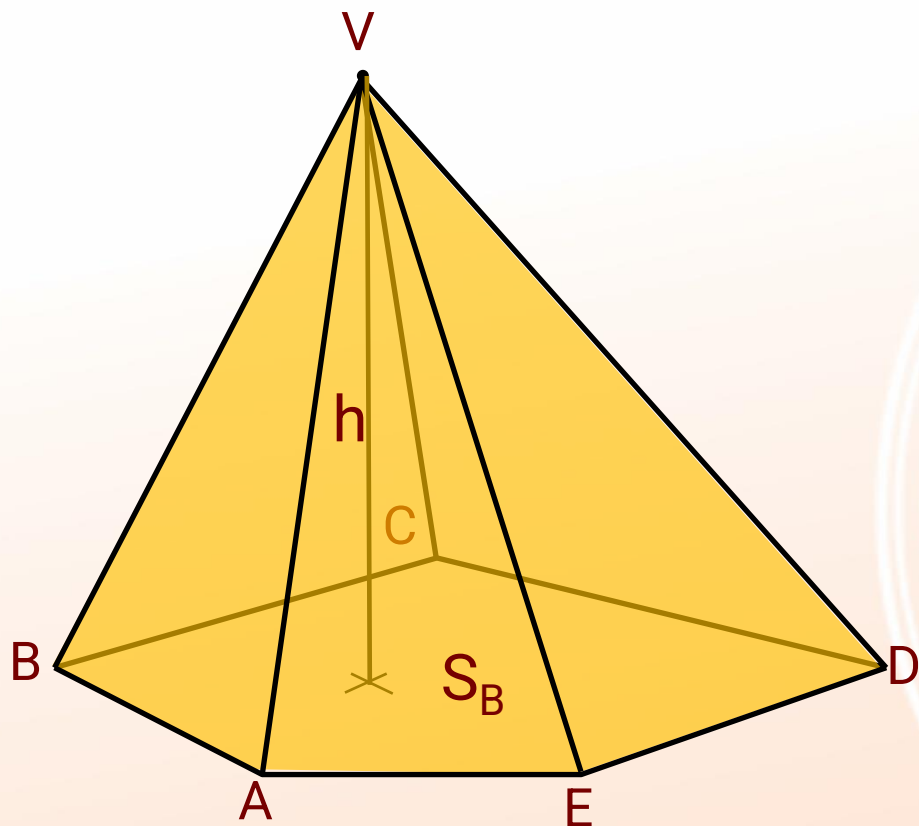
S_T : área total

S_L : área lateral

S_B : área de la base

VOLUMEN DEL SÓLIDO DETERMINADO POR UNA PIRÁMIDE

Teorema.- El volumen del sólido determinado por una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base y la longitud de la altura.



En la figura, el volumen del sólido determinado por la pirámide es

$$V = \frac{1}{3} (S_B)(h)$$

S_B: área de la base
h: longitud de la altura

EJERCICIO 02

En una pirámide cuadrangular regular, la arista básica mide q . Si la base es equivalente a una de las caras laterales, entonces el volumen del sólido determinado por la pirámide es

A) $\frac{q^3}{2} \sqrt{15}$

B) $\frac{q^3}{3} \sqrt{15}$

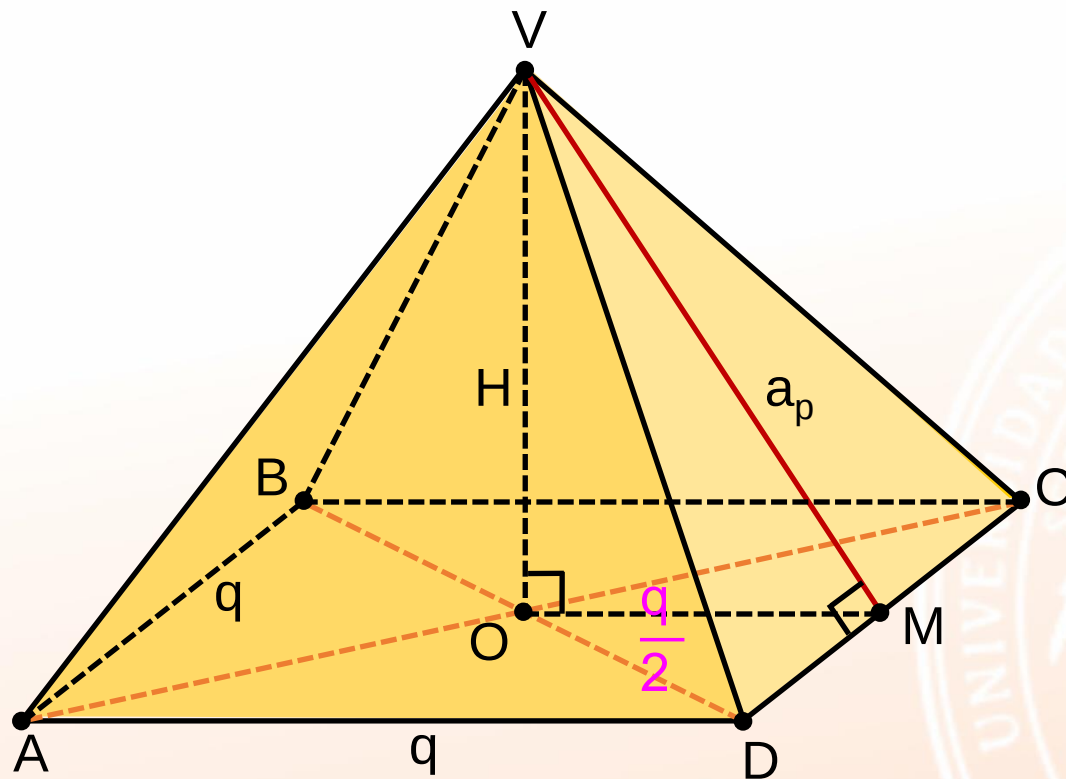
C) $\frac{q^3}{5} \sqrt{15}$

D) $\frac{q^3}{6} \sqrt{15}$

E) $\frac{q^3}{7} \sqrt{15}$

RESOLUCIÓN 02

En una pirámide cuadrangular regular, la arista básica mide q . Si la base es equivalente a una de las caras laterales, entonces el volumen del sólido determinado por la pirámide es



Volumen: $V = ?$

Dato: $S_{ABCD} = S_{VCD}$

$$q^2 = \frac{(q)(a_p)}{2} \Rightarrow a_p = 2q$$

ΔVOM , teorema de Pitágoras

$$H^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = (a_p)^2$$

$$H^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = (2q)^2 \Rightarrow H = \frac{q}{2} \sqrt{15}$$

Teorema:

$$V = \frac{1}{3}(q)^2\left(\frac{q}{2} \sqrt{15}\right)$$

$$V = \frac{q^3}{6} \sqrt{15}$$

Clave: D

EJERCICIO 03

En una pirámide regular V-ABCD, las aristas son congruentes, la distancia del centro de la base a una de las caras laterales es $\sqrt{2}$ u. El volumen (en u^3) del sólido determinado por dicha pirámide es

A) $4\sqrt{3}$

B) $4\sqrt{6}$

C) $3\sqrt{7}$

D) $3\sqrt{2}$

E) $2\sqrt{3}$



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

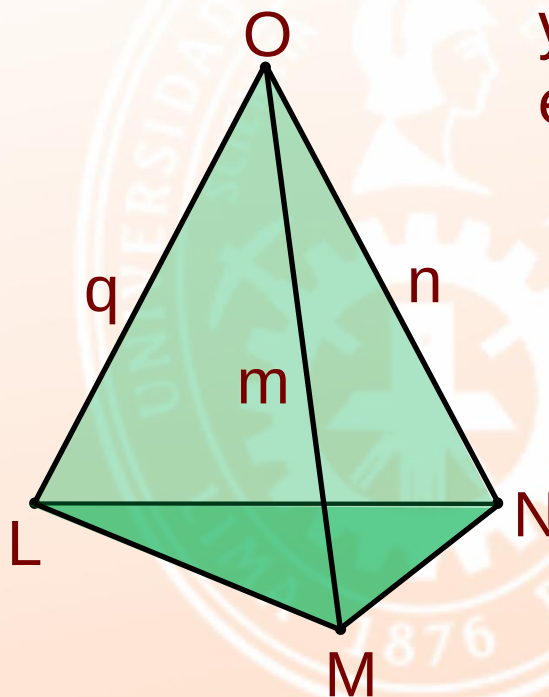
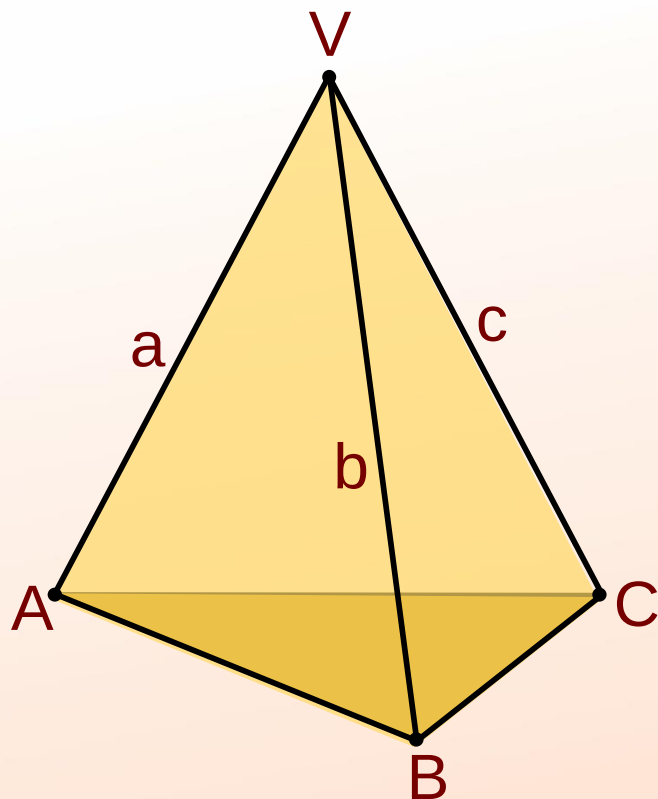
**RAZÓN DE VOLÚMENES
EN PIRÁMIDES**

**CICLO
PRE
2024-1**



PIRÁMIDES TRIANGULARES CON UN ÁNGULO TRIEDRO CONGRUENTE

Teorema.- Si dos pirámides triangulares tienen un ángulo triedro congruente, entonces los volúmenes de los sólidos determinados por las pirámides son proporcionales a los productos de las longitudes de las aristas que concurren en los vértices de éstos ángulos triedros.

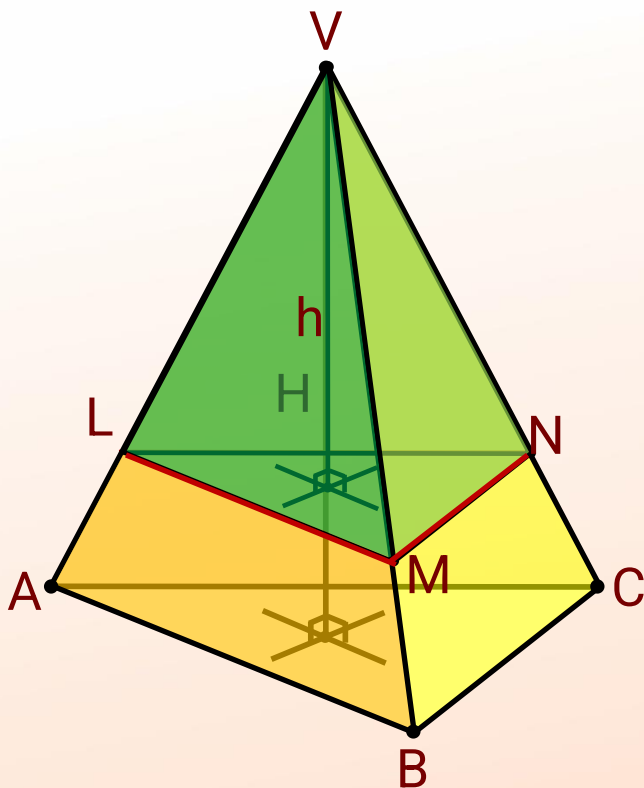


Si los ángulos triedros V-ABC y O-LMN son congruentes, entonces:

$$\frac{V_{V-ABC}}{V_{O-LMN}} = \frac{abc}{qmn}$$

PIRÁMIDES SEMEJANTES

Definición.- En una pirámide, al trazar un plano secante a la superficie lateral y paralelo a la base, se determina otra pirámide, semejante a la pirámide dada, cuya base es una sección transversal de la pirámide.



Si los planos que contienen a las bases ABC y LMN son paralelos, entonces las pirámides V-ABC y V-LMN son semejantes

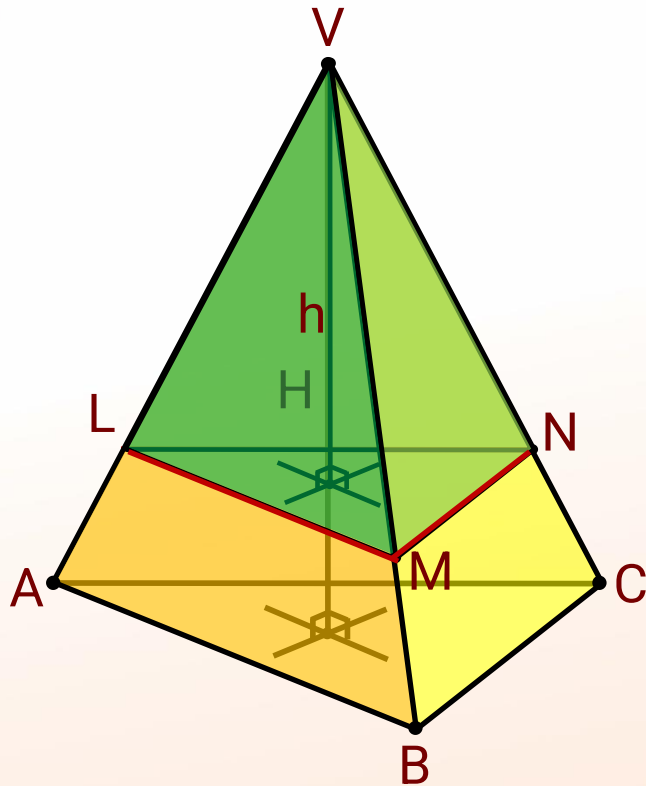
PIRÁMIDES SEMEJANTES

Teorema.- Si dos pirámides son semejantes, entonces los elementos homólogos correspondientes son proporcionales.

Teorema.- Si dos pirámides son semejantes, entonces las áreas de las superficies laterales, totales y de las caras homólogas, son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los elementos homólogos.

Teorema.- Si dos pirámides son semejantes, entonces los volúmenes de los sólidos determinados, son proporcionales a los cubos de las longitudes de sus elementos homólogos.

PIRÁMIDES SEMEJANTES



Las pirámides V-ABC y V-LMN son semejantes

$$\frac{VA}{VL} = \frac{AB}{LM} = \frac{BC}{MN} = \frac{H}{h} = \dots = k$$

$$\frac{S_{V-ABC}}{S_{V-LMN}} = \left(\frac{VA}{VL}\right)^2 = \left(\frac{AB}{LM}\right)^2 = \left(\frac{BC}{MN}\right)^2 = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \dots = k^2$$

$$\frac{V_{V-ABC}}{V_{V-LMN}} = \left(\frac{VA}{VL}\right)^3 = \left(\frac{AB}{LM}\right)^3 = \left(\frac{BC}{MN}\right)^3 = \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \dots = k^3$$